Algebra III - Abstraktna algebra, 2. kolokvij, 21.01.2016.

1. Naj bo $U(20) = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 20,\ \gcd(i, 20) = 1\}$. Vemo, da je $U(20)$ grupa za množenje po modulu 20. Naj bo $H = \langle 9 \rangle$ ciklična podgrupa grupe $U(20)$, generirana z 9.

(a.) Poišči vse desne odseke podgrupe H v grupi $U(20)$.

(b.) Napiši Cayley-evo tabelo za $U(20)/H$.

(c.) Poišči vse podgrupe grupe $U(20)/H$.

Re.

(a.) Vsi desni odseki podgrupe H v grupi $U(20)$ so $\{1, 9\}$, $\{3, 7\}$, $\{11, 19\}$ in $\{13, 17\}$.

(b.) $U(20)/H = \{1H, 3H, 11H, 13H\}$.

$\cdot$	$1H$	$3H$	$11H$	$13H$
$1H$	$1H$	$3H$	$11H$	$13H$
$3H$	$3H$	$1H$	$13H$	$11H$
$11H$	$11H$	$13H$	$1H$	$3H$
$13H$	$13H$	$11H$	$3H$	$1H$

(c.) Vse podgrupe grupe $U(20)/H$ so $\{1H\}$, $\{1H, 3H\}$, $\{1H, 11H\}$, $\{1H, 13H\}$ in $U(20)/H$.

$\square$

2. Množica $G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ tvori grupo glede na operacijo množenja, in njena Cayley-eva tabela je dana na desni strani.

(a.) Določi vse edinke grupe G.

(b.) Izračunaj center grupe G.

(c.) Izračunaj normalizator ter centralizator elementov j in $-k$.

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Re.

(a.) Vse edinke grupe G so $\{1\}$, $\{1, -1\}$, $\{1, -1, i, -i\}$, $\{1, -1, j, -j\}$, $\{1, -1, k, -k\}$ in $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$.

(b.) $Z(G) = \{1, -1\}$.

(c.) $N(j) = \{1, -1, j, -j\}$, $N(-k) = \{1, -1, k, -k\}$.

$\square$

3. Naj bo G grupa realnih števil z operacijo seštevanja $(\mathbb{R}, +)$. Za $r \in G$ ter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definirajmo $r * (x, y) = (x + ry, y)$. Naj bo T poljubna točka v ravnini.

(a.) Pokaži, da je preslikava $* : G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ delovanje grupe G na množici $\mathbb{R}^2$.

(b) Geometrijsko opiši orbito, ki vsebuje točko T.

(c) Poišči stabilizator G_T.

(d) Če je $H = \{(1, 2), (2, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, določi $5 + G_H$.

Re.

(a.) $0 * (x, y) = (x, y)$, $(r + s) * (x, y) = r * (s * (x, y))$.

(b.) $G_T = \{(x + ry, y) : r \in \mathbb{R}\}$, premica skozi točko T vzporedna s x-osjo.

(c.) $G_T = \{0\}$.

(d.) $5 + G_H = \{5\}$.

$\square$

4. (a) Poišči vse Sylowe 2-podgrupe grupe D_{10} (diederska grupa vseh simetrij pravilnega 10-kotnika glede na operacijo kompozicije);

(b) Pokaži, da grupa G reda 992 ne more biti enostavna.

Re.

(a.) $D_{10} = \{R_0, R_{36}, R_{36}^2, R_{36}^3, R_{36}^4, R_{36}^5, R_{36}^6, R_{36}^7, R_{36}^8, R_{36}^9, F, R_{36}F, R_{36}^2F, R_{36}^3F, R_{36}^4F, R_{36}^5F, R_{36}^6F, R_{36}^7F, R_{36}^8F, R_{36}^9F, \}$, $|D_{10}| = 20$. Vse Sylowe 2-podgrupe grupe D_{10} so $\{R_0, R_{36}^5, F, R_{36}^5F\}$, $\{R_0, R_{36}^5, R_{36}F, R_{36}^6F\}$, $\{R_0, R_{36}^2F, F, R_{36}^7F\}$, $\{R_0, R_{36}^3F, F, R_{36}^8F\}$ in $\{R_0, R_{36}^4F, F, R_{36}^9F\}$.

(b.) $992 = 2^5 \cdot 31$, $n_2 \in \{1, 31\}$, $n_{31} \in \{1, 2^5\}$...

$\square$

Naloge so povzeti z `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`